



*Hinweis: Versuche die Aufgaben so gut wie möglich, schon vor dem Livestream zu lösen.
So wirst du dann, die dort vorgestellten Lösungen und Strategien noch besser verstehen können.*

Aufgabenblatt #7.4 – Entdecken von Gesetzmäßigkeiten

1. Zum Aufwärmen! Kreise die richtige Lösung ein.

- (1) Um die Leistung seiner Hühner zu prüfen, führt Bauer Franz eine Eier-Statistik. Diese Woche war ein Viertel der Hühner faul und legte kein einziges Ei. Seine fleißigsten Hühner hingegen legten ein jedes 7 Eier, und genauso viele Hühner legten je 6 Eier. Die restlichen Hühner legten je 5 Eier. Insgesamt legten die Hühner diese Woche 99 Eier.

Wie viele Hühner hat Bauer Franz?

- (A) 8 (B) 12 (C) 16 (D) 20 (E) 24

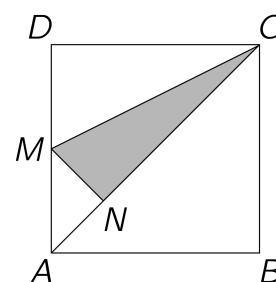
- (2) Von einer sechsstelligen, durch 12 teilbaren Zahl sind nur die ersten fünf Ziffern bekannt: 25762.

Wie lautet die letzte Ziffer dieser Zahl?

- (A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

- (3) Im Quadrat $ABCD$ ist M der Mittelpunkt der Seite \overline{AD} . Der Punkt N liegt so auf der Diagonalen \overline{AC} , dass die Strecke \overline{MN} senkrecht auf \overline{AC} steht.

Welchen Anteil am Flächeninhalt des Quadrats $ABCD$ hat das grau markierte Dreieck MNC ?



- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{7}{36}$ (D) $\frac{3}{16}$ (E) $\frac{7}{40}$



2. a) Schon die Griechen kannten eine Formel zur Berechnung der Summe der ersten n -Quadratzahlen. So gilt:

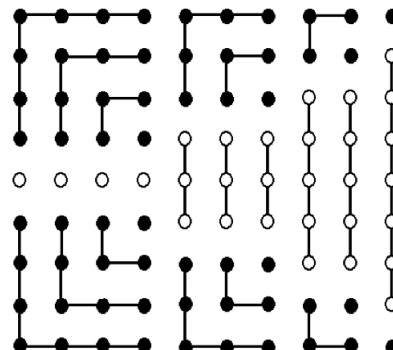
$$Q(1) = 1^2 = 1, \quad Q(2) = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5,$$

$$Q(3) = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$$

Finde die Formel zur Berechnung der Summe der ersten n -Quadratzahlen:

$$Q(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \dots$$

Untersuche dazu die nebenstehende Abbildung, welche die Summe der ersten 4 Quadratzahlen, also $Q(4)$ figuriert darstellt. Wenn du die Gesetzmäßigkeiten der Darstellung erkennst, findest du auch die gesuchte Formel.



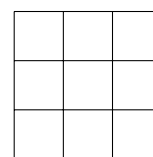
- b) Finde auch die Formel zur Berechnung der Summe der ersten n -Kubikzahlen:

$$K(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \dots$$

Kannst du die Summe der ersten n -Kubikzahlen auch figuriert darstellen?

3. (Olympiadaufgabe 520633)

Clara beginnt mit einem Quadrat, wir nennen dies „die Figur der Stufe 0“, kurz Figur (0). Sie zerlegt dieses Quadrat in neun gleich große Quadrate, dies ist „die Figur der Stufe 1“ oder Figur (1) (siehe nebenstehende Abbildung).



Jetzt sagt sie sich: Ich will nun immer wieder jedes Quadrat, das genau einen Eckpunkt mit dem ursprünglichen Quadrat aus Figur (0) gemeinsam hat, in neun gleich große Teilquadrate zerlegen. Clara zählt jetzt immer alle diejenigen Quadrate, die in ihrem Inneren keine weiteren Quadrate enthalten, und hält diese Anzahl mit dem Namen $A(n)$ fest, wenn sie n Zerlegungsschritte gemacht hat. Bei der Figur (1) zählt sie also 9 Quadrate und erhält $A(1) = 9$.

- Wie viele Quadrate zählt Clara bei Figur (2)?
- Was erhält Clara für $A(5)$?
- Finde eine Vorschrift (oder Formel) für die Anzahl $A(n)$ in der Stufe n für $(n \geq 1)$ und begründe sie.
- Berechne nun $A(10)$.



Quellen

- Aufgabe 1:
Känguru Wettbewerb: 2011 (C2 und B5),
(C7) Klasse 7/8 und 2012 (C4) Klasse 7/8
<http://www.mathe-kaenguru.de>
- Aufgaben 2:
Bezirkskomitee Chemnitz, Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften Klasse 6
<https://www.bezirkskomitee.de>
- Aufgabe 3:
Mathematik-Olympiade: 520633
<https://www.mathematik-olympiaden.de>